

Matemática atuarial

Seguros Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ ciências atuariais da Universidade Federal de Alfenas- Campos varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L,H. Seguros de Vida. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acesso em: 28 jun. 2026.

Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
 - Avaliar riscos.
 - Avaliar sistemas de investimentos.

- A matemática atuarial atua fornecendo meios para apuração de prêmios de seguros ligados à vida...
 - Produtos atuariais do ramo vida
 - Seguros,
 - Planos de previdência,
 - Planos de benefício

Seguros

➤ *Seguro é todo contrato pelo qual uma das partes (**segurador**) se obriga a pagar um *benefício a outra (**segurado**) em caso de ocorrência de **sinistro**, em troca do recebimento de um **prêmio** seguro.*

➤ Características do contrato de seguros

- Aleatório: Depende de elementos futuros e incertos;
- Oneroso e Bilateral: Há obrigações para as duas partes, segurado e segurador possuem ônus e vantagens econômicas;
- Solene: Há uma formalidade materializada na forma de apólice;

Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte .
 - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
 - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
 - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.
 - Refletem uma característica única nos seres humanos.

Seguro de vida

- Para a apuração dos **prêmios** ligados à vida é necessário uma avaliação do **risco** de morte:
- Como o risco é uma probabilidade de ocorrência de eventos desfavoráveis, logo:
 - É necessário identificar e caracterizar a variável aleatória trabalhada.
 - *Tempo de vida restante.*
- Diferente do risco de danos, no risco de vida (sob certas circunstâncias) a seguradora lida com a certeza que terá que pagar algum dia o valor do benefício.

Seguro de vida

- Suponha que a seguradora deseja guardar o valor presente do gasto que ela terá com o segurado no futuro. Qual deverá ser esse valor?

$$F_0 = Fv^n = bv^n$$

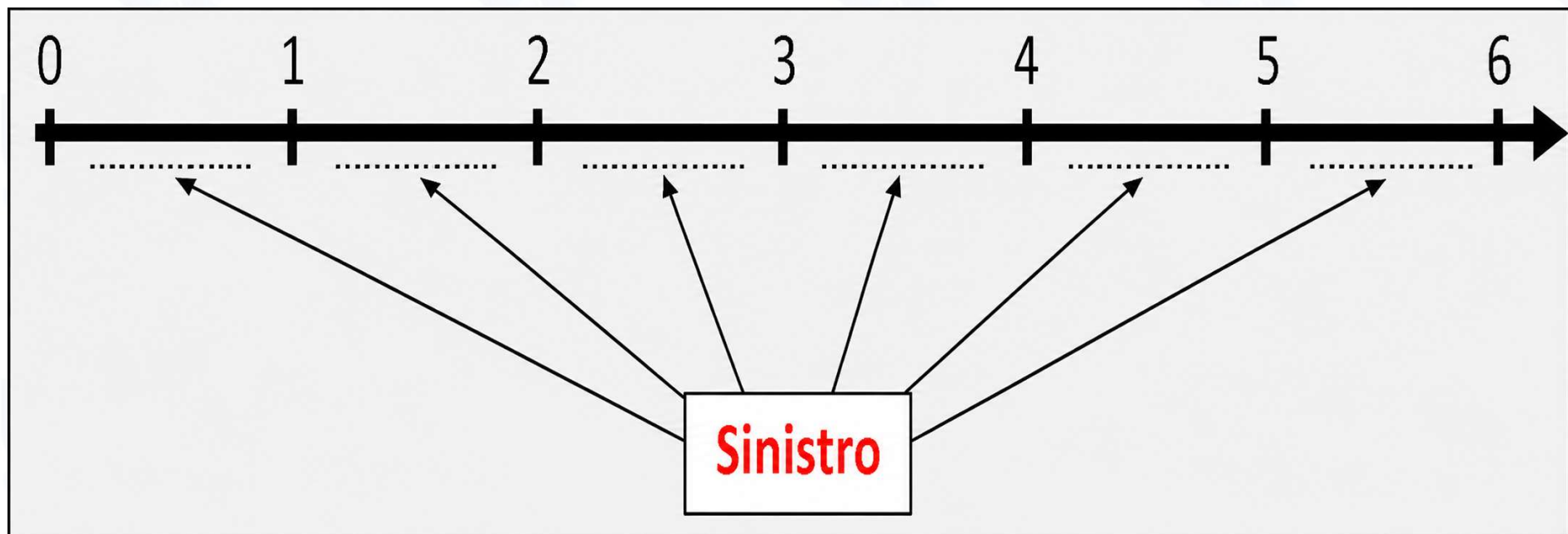
É usual chamar de b o benefício pago ao segurado, e n nesse caso corresponde ao tempo de vida do segurado.

- O tempo de vida futuro (ou adicional) de um indivíduo de idade x , que deseja contratar um seguro de vida inteiro (vitalício) de definida por uma variável aleatória, tal que:
 - $T \in (0, \infty)$
 - Tábua de vida.
 - Função de distribuição.

EXEMPLO 1: Para que um beneficiário receba um valor financeiro de \$100 000,00 ao **final do ano do sinistro**. Qual deve ser o valor presente (VP) ou F_0 ?

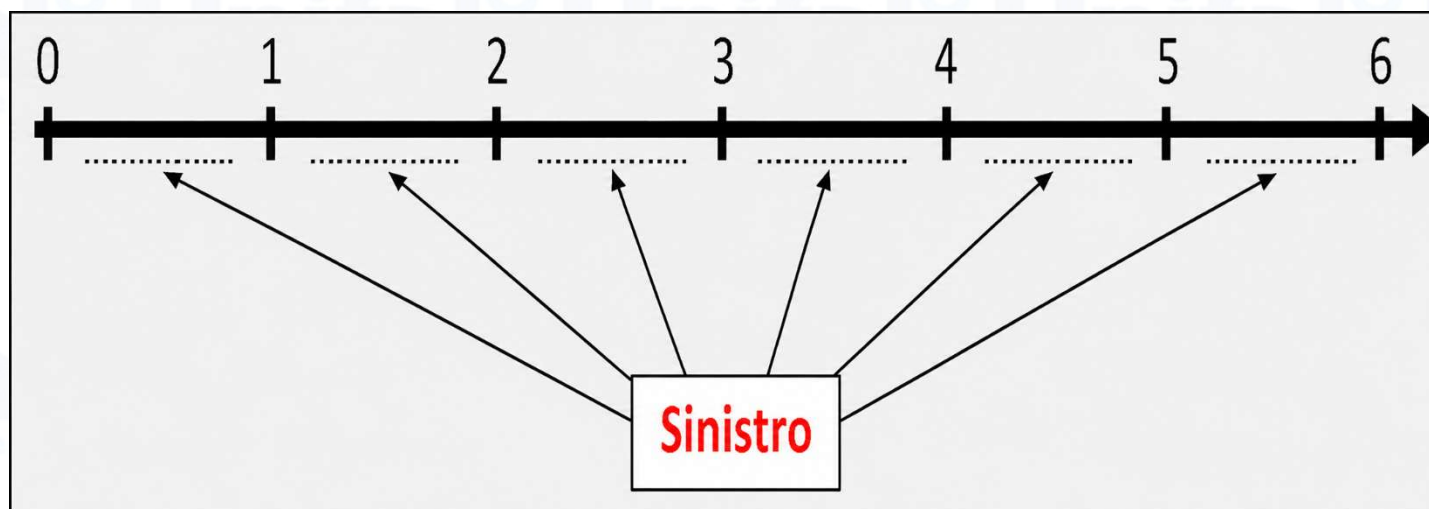
Resp.:

$$VP = 100000 \left(\frac{1}{1+i} \right)^{T+1} = 100000v^{T+1}$$



EXEMPLO 1 (continuação): Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então $v = 0,9524$, assim:

Ano do sinistro	VP
0	$VP = 100000v^{0+1} \approx \$95240,00$
1	$VP = 100000v^{1+1} \approx \$90706,58$
2	$VP = 100000v^{2+1} \approx \$86388,94$
3	$VP = 100000v^{3+1} \approx \$82276,83$
4	$VP = 100000v^{4+1} \approx \$78360,45$
5	$VP = 100000v^{5+1} \approx \$74630,49$



Seguro de vida

- Em resumo temos que a uma taxa de 5% ao ano para um beneficiário poder ganhar $b = \$100000,00$ ao final do ano do sinistro, temos que ter os seguintes valores presentes.

$T(\text{anos})$	$VP(\$)$
0	$\approx \$95240,00$
1	$\approx \$90706,58$
2	$\approx \$86388,94$
3	$\approx \$82276,83$
4	$\approx \$78360,45$
5	$\approx \$74630,49$

- Imagine que T é uma variável aleatória e esses são os únicos valores que ele pode assumir. Então que é o valor presente esperado que o indivíduo x deveria pagar hoje por este seguro de modo que a seguradora receba o necessário para pagar o benefício de $\$100\,000,00$?

Seguro de vida

A resposta a essa questão está relacionada a esperança matemática (valor esperado ou média probabilística) de uma função de variável aleatória.

Para o caso em questão seja T uma variável, então :

$$E[g(T)] = \sum_j g(t_j)P(T = t_j)$$

Seguro de vida

Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de bv^{T+1} , logo:

$$E(VP) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

Seguro de vida

Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser o valor esperado para bv^{T+1} , logo:

$$E(VP) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

$$E(VP) = b \sum_{t=0} v^{t+1} P(T_x = t)$$

Também chamado de *valor presente atuarial* VPA .

Seguro de vida

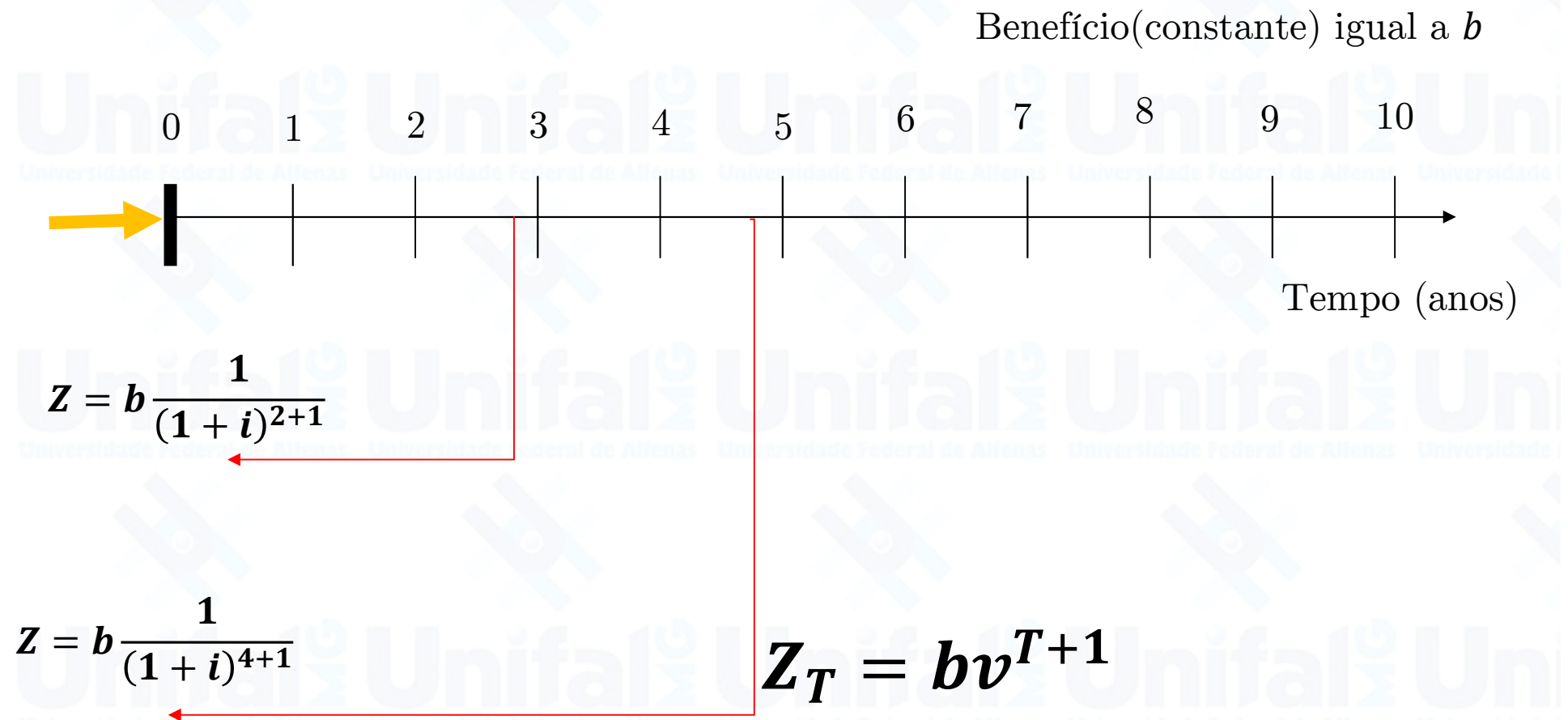
Definição: Seja T a variável aleatória associada ao tempo de vida futuro, ou seja, o tempo entre a emissão da apólice do seguro e a morte do segurado, então:

$b_T = b \rightarrow$ Função benefício;

$v_t = v^{t+1} \rightarrow$ Função desconto;

$Z_T = bv^{T+1} \rightarrow$ Função valor presente.

Seguro de vida pago ao fim do ano de morte



Prêmio Puro único

- Chame de *prêmio puro único* a parcela única do prêmio, suficiente para pagar sinistros.
- Neste sentido o *prêmio puro único* é o prêmio que propõe o pagamento de despesas relacionadas ao risco que está sendo assumido pela seguradora.
 - O valor *esperado* do valor presente de todos os benefícios que a seguradora se compromete a pagar.
- Em geral é estabelecido em um dado período, normalmente um ano.
- O termo *puro* significa que ao valor considerado não foram adicionadas quaisquer cargas técnicas.
 - De gestão ou comerciais
- O termo *único* se refere ao fato do pagamento do prêmio ser feito mediante um único pagamento.

Seguro de vida

- Só há equilíbrio entre lucro e prejuízo se houver um elevado número de contratos do mesmo tipo...
- A reserva criada, recebendo apenas como prêmio o valor atuarial do risco coberto, não é suficiente para garantir que a seguradora não venha a ter prejuízos significativos.

SEGURO DE VIDA VITALÍCIO (INTEIRO)

- Existe incerteza sobre o momento do pagamento, e o benefício será pago não importando quando.
- O valor presente de um benefício unitário pago ao final do ano de morte de um segurado de idade x será representado pela variável aleatória, Z_{T_x} , tal que:

$$Z_{T_x} = v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, \omega - x$$

em que ω corresponde a última idade da tábua de vida usada como modelo de probabilidade...

EXEMPLO 2: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos? Considere um benefício igual a \$1, com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

x	q_x
...	
110	0,60392
111	0,66819
112	0,73948
113	0,81825
114	0,90495
115	1,00000

➤ Resp.:

$$\omega - x = 5$$

$$b_T = \begin{cases} 1, & t = 0, 1, 2, \dots, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow \text{Função benefício;}$$

$$v_T = v^{t+1}, t \geq 0 \rightarrow \text{Função desconto;}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow \text{Função valor presente.}$$

Obs.: É normal o uso de T_x para indicar que a variável T está vinculada a idade x .

$$b_T = 1.u.m, \quad i = 4\%.$$

x	q_x	p_x	l_x
...			
110	0,60392	0,39608	305,008
111	0,66819	0,33181	120,808
112	0,73948	0,26052	40,0852
113	0,81825	0,18175	10,443
114	0,90495	0,09505	1,89801
115	1,00000	0,00000	0,18041

x : Idade da coorte

$$q_x = P(T_x \leq 1)$$

$$p_x = P(T_x > 1)$$

l_x : número de vivos a idade x
Do ponto de vista analítico, l_x pode ser considerada uma função contínua e diferenciável de x .

$$Z_t = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6\}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{110} = 0) + v^2 P(T_{110} = 1) + v^3 P(T_{110} = 2) + v^4 P(T_{110} = 3) + v^5 P(T_{110} = 4) + v^6 P(T_{110} = 5)$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} P(T_{110} = t)$$

Importante: $P(T_x = t)$ corresponde a probabilidade do tempo de vida adicional ser igual a t , no caso a probabilidade que indivíduo “morra” durante o intervalo de t a $t + 1$ é determinado que

$$P(t < T_x \leq t + 1) = P(T_x > t) - P(T_x > t + 1)$$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x$$

Lembrando da relação ${}_{m+l} p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_t p_x {}_1 p_{x+t}$$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x (1 - {}_1 p_{x+t})$$

$$P(T_x = t) = ({}_t p_x) (q_{x+t}) = {}_t | q_x$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} ({}_t p_{110}) (q_{110+t})$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} P(T_{110} = t) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} ({}_t p_{110}) (q_{110+})$$

$$\begin{aligned} E(Z_{T_{110}}) &= v^1 {}_0 p_{110} q_{110} + v^2 {}_1 p_{110} q_{111} + v^3 {}_2 p_{110} q_{112} + v^4 {}_3 p_{110} q_{113} + v^5 {}_4 p_{110} q_{114} \\ &+ v^6 {}_5 p_{110} q_{115} \end{aligned}$$

$$E(Z_{T_{110}}) \approx 0,9403557 u. m.$$

Seguro de vida de uma pessoa de idade x com cobertura vitalícia e benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado

$$E(Z_{T_x}) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} P(T_x = t) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t})$$

$$A_{110} \approx 0,9403557u.m.$$

Observação

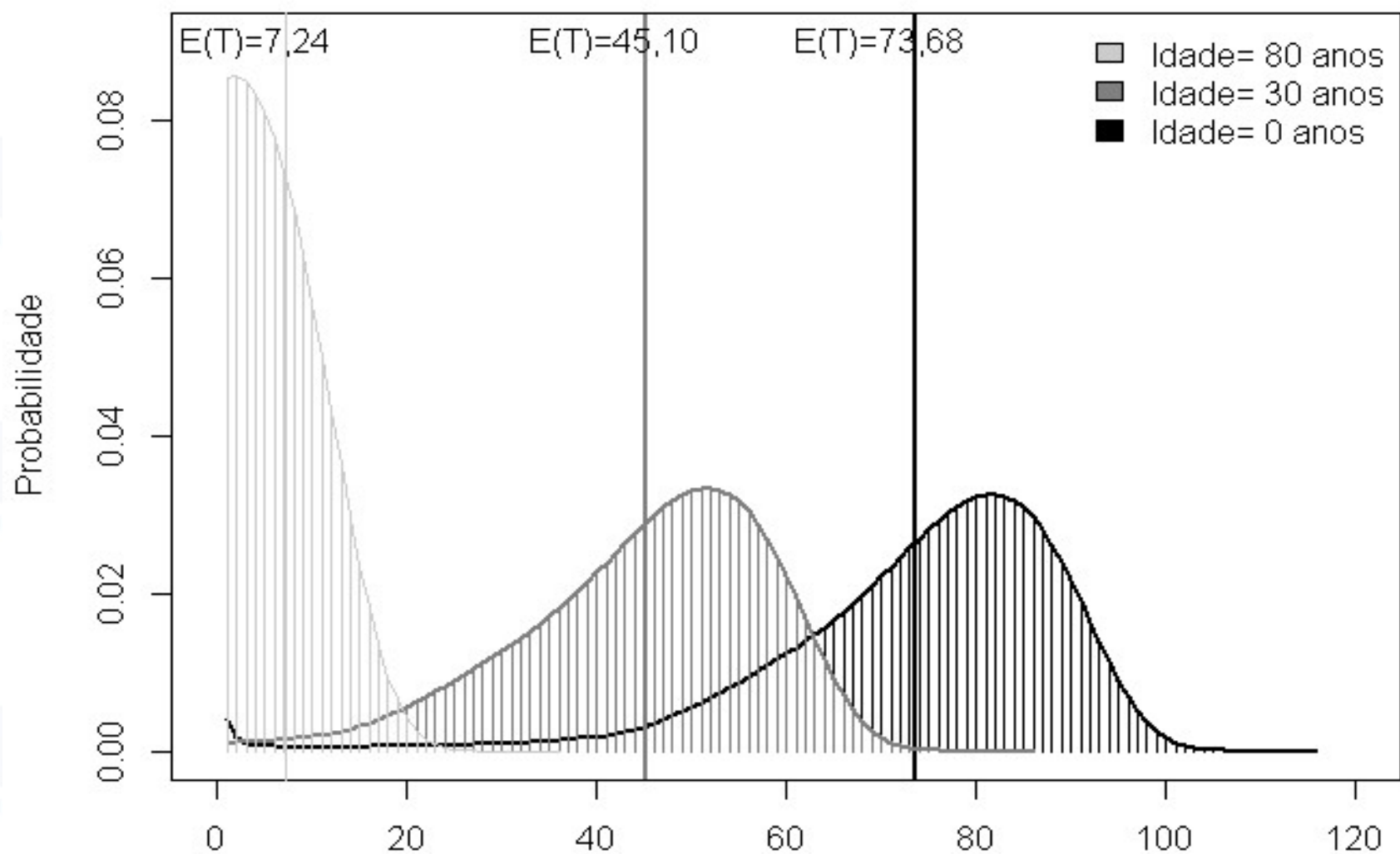
A expectativa de vida de uma pessoa de idade x , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} t {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} t p_x$$

A **expectativa de vida completa** de uma pessoa de idade x , admitindo que a distribuição das mortes ao longo do ano é uniforme, é dada por:

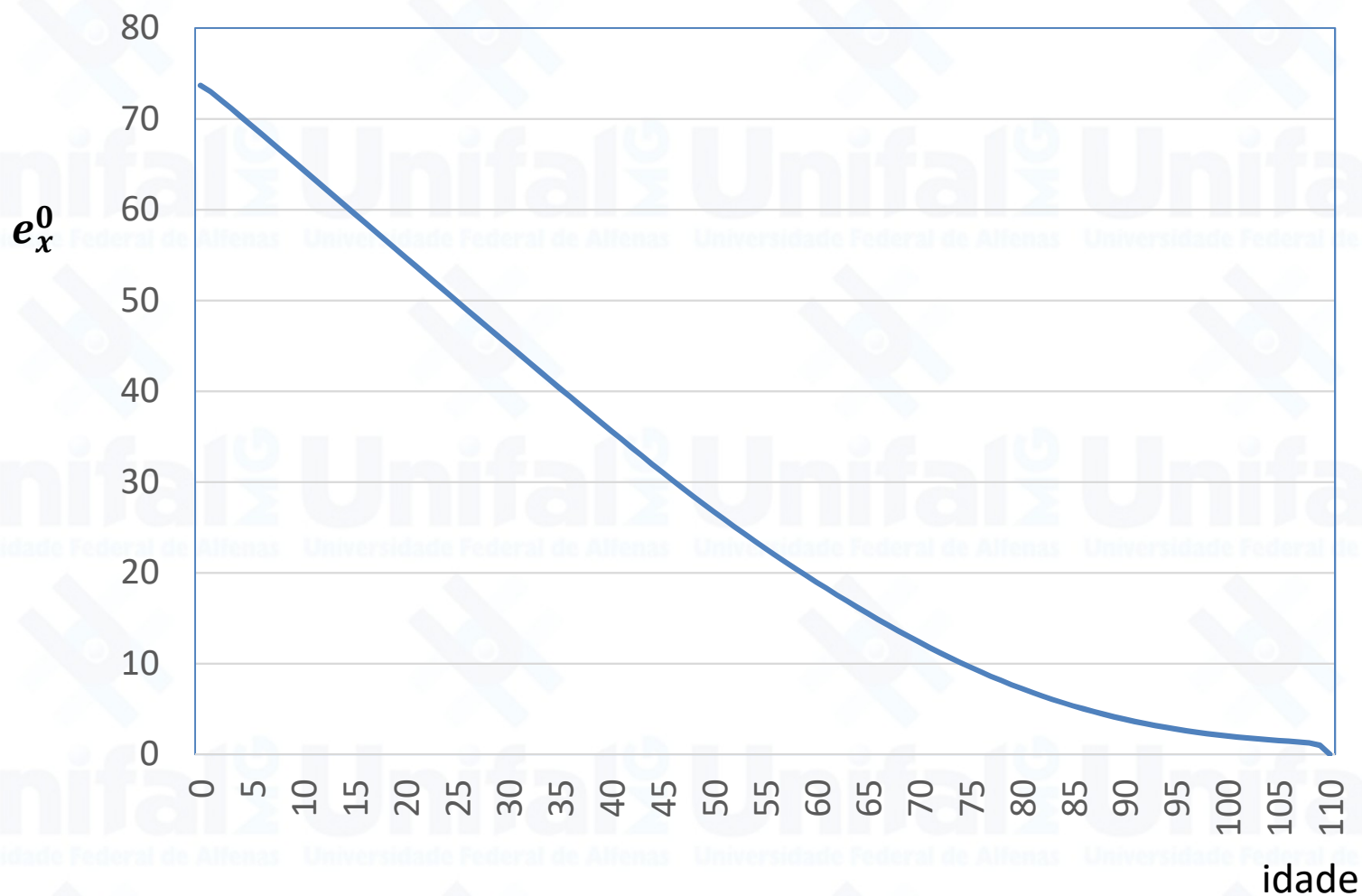
$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

Probabilidades AT-49 M



Probabilidades AT-49 M

EXPECTATIVA DE VIDA



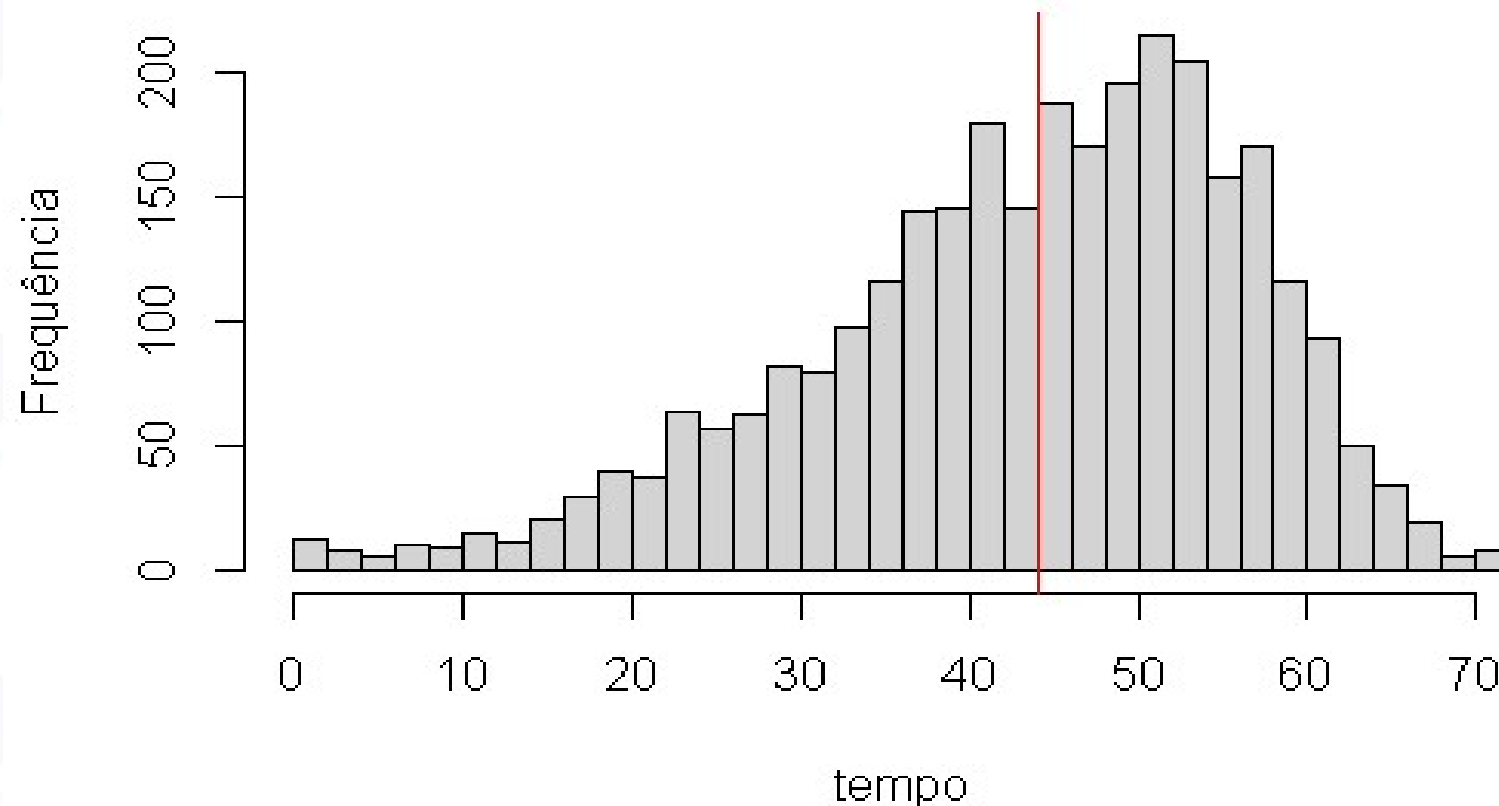
Exemplo 3: Uma pessoa com 30 anos deseja contratar um seguro de vida vitalício que pague ao beneficiário o valor de \$200000,00 ao final do ano de falecimento do segurado. Para a precificação do seguro, considera-se uma taxa de juros anual efetiva de 3% e admite-se que o tempo de vida adicional do segurado segue o comportamento descrito pela tábua de vida AT-49. Assim:

$$A_{30} = \sum_{t=0}^{10} v^{t+1} ({}_t p_{30}) (q_{30+t}) \approx 0,28569$$

$$VPA = 200000 A_{30} \approx 57138,6$$

Exemplo 3(cont.): Considere agora que após um determinado tempo observando 3000 pessoas da mesma coorte que fizeram no mesmo ano um seguro de vida vitalício. Seja anotado o tempo gasto para que cada um venha a falecer.

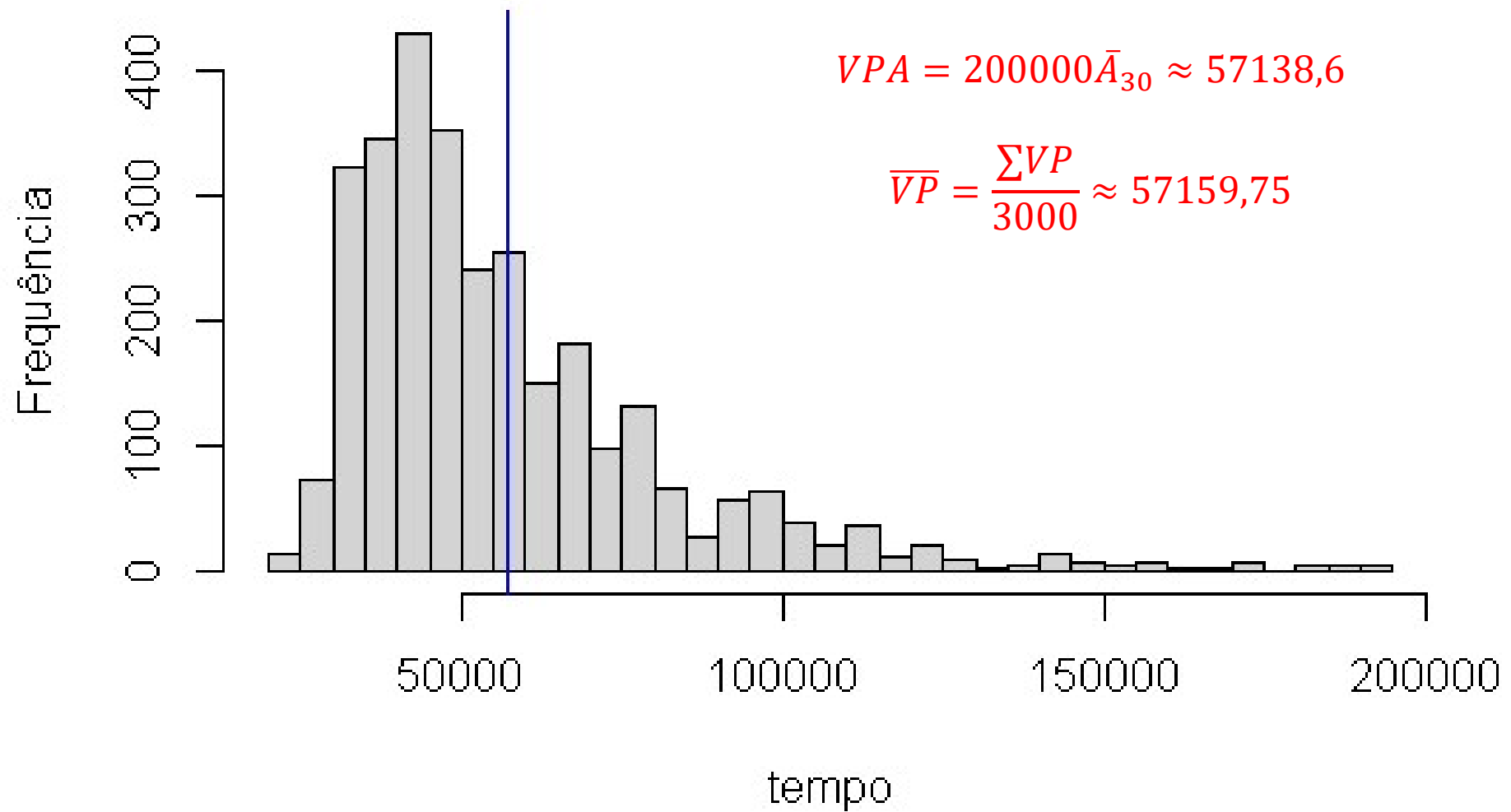
Histograma do tempo de vida adicional T



Exemplo 3(cont.): Levando em consideração que “sabemos” previamente a sobrevida de cada segurado (dados simulados). Os valores presentes necessários ao pagamento do benefício contratado por cada segurado pode ser calculada. Assim:

$$z_t = bv^{t+1} = 200000 \left(\frac{1}{1 + 0,03} \right)^{t+1}$$

valor presente



SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- O pagamento ocorre desde que o sinistro ocorra dentro de um período estipulado.
- Como calcular o VPA desse Benefício?
 - Calcular a esperança matemática da variável aleatória “quanto devo ter hoje para pagar o benefício devido em relação a um segurado?”

EXEMPLO 3: Pense no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro onde caso este segurado faleça nos próximos 5 anos, o seu beneficiário receberá uma quantia de $1.u.m.$ Considere também uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte. Calcule o valor esperado da função valor presente.

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

Resp.:

$$b_T = \begin{cases} 1, & t = 0, 1, 2, \dots, 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow \text{Função benefício;}$$

$$v_T = v^{t+1}, t \geq 0 \rightarrow \text{Função desconto;}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow \text{Função valor presente.}$$

Obs. É normal o uso de T_x para indicar que a variável T está vinculada a idade x

$$b_T = 1.u.m., \quad i = 4\%.$$

x	$q_x =_1 q_x$	$p_x =_1 p_x = 1 - q_x$	$l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$Z_t = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, 0\}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4) + [0 P(T_{25} = 5) + \dots]$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 {}_0p_{25}q_{25} + v^2 {}_1p_{25}q_{26} + v^3 {}_2p_{25}q_{27} + v^4 {}_3p_{25}q_{28} + v^5 {}_4p_{25}q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 {}_2p_{25} q_{27} + v^4 {}_3p_{25} q_{28} + v^5 {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1,04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 {}_2p_{25} q_{27} + v^4 {}_3p_{25} q_{28} + v^5 {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1,04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1,04}\right) 0,00077 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^2 0,99923 0,00081 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^3 0,99842 0,00085 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^4 0,99757 0,00090 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^5 0,99667 0,00095$$

$$E(Z_{T_{25}}) \approx 0,003788 \text{ u.m.}$$

Outra opção seria:

$$b_T = \begin{cases} 1, & t = 0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad v_T = v^{t+1}, t \geq 0 \quad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$VPA = E(Z_T)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 {}_2p_{25} q_{27} + v^4 {}_3p_{25} q_{28} + v^5 {}_4p_{25} q_{29}$$

Como ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$, então:

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 p_{25} p_{26} q_{27} + v^4 p_{25} p_{26} p_{27} q_{28} + v^5 p_{25} p_{26} p_{27} p_{28} q_{29}$$

$$E(Z_T) \approx 0,003788 \text{ u. m.}$$

Seguro de vida de uma pessoa de idade x com cobertura de n anos, com benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado.

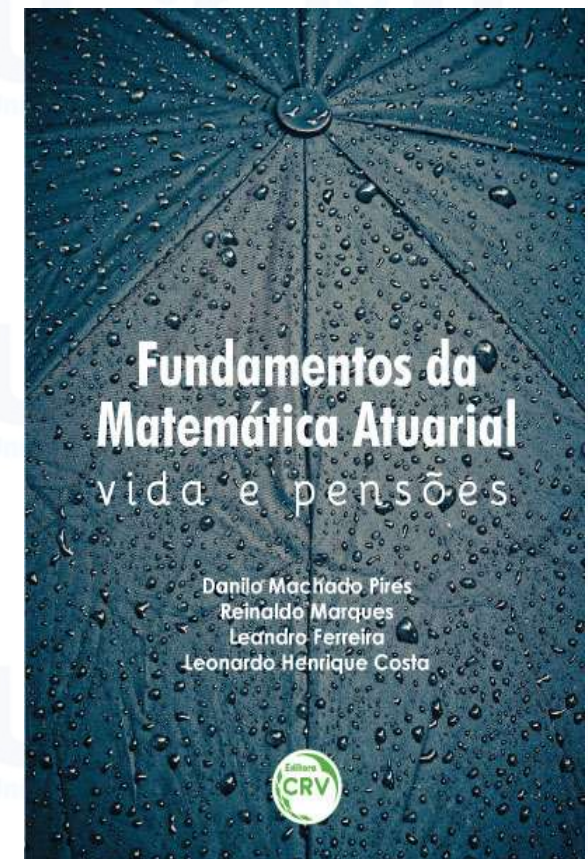
$$E(Z_{T_x}) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(T_x = t) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t})$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t}) = E(Z_{T_x})$$

“1” acima do “ x ” indica que o seguro é pago se “ x ” expirar antes que “ n ”.

$$A_{25:\overline{5}|} \approx 0,003788 \text{ u.m}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. *Actuarial Mathematics*, 2^a edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos*. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões*. Curitiba : CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. *Matemática actuarial – Vida e pensões*. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.



Matemática atuarial

Seguros Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

Exemplo 1: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de *vida inteiro* que paga 1 *u.m.* ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevivência desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano. Qual deverá ser o prêmio puro único pago por esse segurado?

Exemplo 1:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left(\frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t}$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05} \right)^1 q_{25} + \left(\frac{1}{1,05} \right)^2 {}_1 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,05} \right)^3 {}_2 p_{25} q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05} \right)^{91} {}_{90} p_{25} q_{115} \approx 0,11242$$

Exemplo 1:

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^1 q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}^{\textcolor{red}{p}}_{25}q_{26} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}^{\textcolor{red}{2p}}_{25}q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} {}_{90}p_{25}q_{115} \approx 0,11242$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^1 {}^{\textcolor{red}{1}}q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}^{\textcolor{red}{p}}_{25}q_{26} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} ({}^{\textcolor{red}{p}}_{25}{}^{\textcolor{red}{p}}_{26}{}^{\textcolor{red}{p}}_{27} \cdots {}^{\textcolor{red}{p}}_{114})q_{115} \approx 0,11242$$

Exemplo 2: A seguradora irá pagar um benefício de 1 u.m. por um seguro temporário caso o segurado de 105 anos faleça dentro um período de 4 anos. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e tábua At-2000 Masculina. Calcule o prêmio puro único:

	x	q_x	p_x
106	105	0.37240	0.62760
107	106	0.40821	0.59179
108	107	0.44882	0.55118
109	108	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	112	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	114	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

$$A_{105^1:\overline{4}|} = v^1 {}_0p_{105}q_{105} + v^2 {}_1p_{105}q_{106} + v^3 {}_2p_{105}q_{107} + v^4 {}_3p_{105}q_{108}$$

$$A_{105^1:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^3 v^{t+1} {}_t p_{105} q_{105+t}$$

$$v = \{v^1, v^2, v^3, v^4\}$$

$$p_{xx} = \{{}_0p_{105}, {}_1p_{105}, {}_2p_{105}, {}_3p_{105}\}$$

$$q_{xx} = \{q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}\}$$

$$A_{105^{1:\bar{4}}|} = \sum_{t=0}^3 v^{t+1} {}_t p_{105} q_{105+t}$$

#Função que recebe como entrada, a taxa de rentabilidade(i) anual, a idade do segurado (idade), o numero de anos de cobertura(n) e o valor do benefício (b).

	x	q_x	p_x
106	105	0.37240	0.62760
107	106	0.40821	0.59179
108	107	0.44882	0.55118
109	108	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	112	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	114	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

```

AX<- function( i, idade, n,b,k) {
  v    <- (1/(i+1))^(k(1:n))
  pxx  <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
                                     # 1, p105, 2p105, 3p105
  qxx  <- qx[(idade+1):(idade+n)]
                                     # q105, q106, q107, q108
  AX   <- b* sum(v*pxx*qxx)
  return (AX)
}

```

$$A_{105^{1:\bar{4}}|} = \text{AX}(0.04, 105, 4, 1, 1)$$

```

AX<-function( i, idade, n,b,k)  {

  if(n==0){
    Ax<-0      #Ajustes
  } else{
    v <- (1/(i+1))^(k*(1:n))
    if(n==1){
      pxx<-1    #Ajustes
    }else {
      pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]))  }

    qxx <- c(qx[(idade+1):(idade+n)])

    Ax <- b* sum(v*pxx*qxx)}
  return (Ax)
}

```

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = AX(i, x, n, b, 1)$$

SEGURO VIDA VITALÍCIO

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_x = AX(i, x, \text{max}(x)-x, b, 1)$$

Expectativa de vida

$$e_0 = \sum_{t=0}^{\omega-x} t {}_t p_x q_{x+t}$$

```
ex<- function(idade) {  
  n    <- max(Idade)-idade  
  pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )  
  qxx <- qx[(idade+1):(idade+n)]  
  t    <- 0:(n-1)  
  ex   <- sum(t*pxx*qxx)  
  return (ex)  
}
```

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$A_{x1:n|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$e_0 = \sum_{t=0}^{\omega-x} t {}_t p_x q_{x+t}$$

$$E(Z_T)$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. *Actuarial Mathematics*, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos*. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões*. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. *Matemática actuarial – Vida e pensões*. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.



Matemática atuarial

Seguros Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

Seguro de vida pago no momento da morte

Seja T ou T_0 a variável aleatória associada ao tempo de vida adicional de um indivíduo recém nascido (de idade **0**). Então a função de sobrevivência, $S_{T_0}(t)$, é a probabilidade desse indivíduo viver além da idade futura t , tal que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - F_{T_0}(t) = P(T_0 > t) \quad \text{ou} \quad S_T(t) = 1 - F_T(t) = P(T > t)$$

Seja T_x a variável aleatória tempo de vida adicional do indivíduo de idade **x** . Então a função de sobrevivência, $S_{T_x}(t)$, é a probabilidade de viver além da idade futura t .

$$S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t) = P(T_x > t)$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A probabilidade de uma pessoa de idade x atingir (viva) a idade $x + t$, é dada por:

$${}_t p_x = S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x)$$

$${}_t p_x = \frac{S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} = \frac{P(T > t + x)}{P(T > x)}$$

- A probabilidade de uma pessoa de idade x morrer antes de atingir a idade $x + t$, é dado por:

$${}_t q_x = 1 - \frac{S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} = F_{T_x}(t)$$

Logo:

$${}_t q_x + {}_t p_x = 1$$

Força de mortalidade

- A força de mortalidade é a taxa na qual as pessoas em uma determinada população estão morrendo em um período de tempo específico.
- Função hazard $h(x)$ / Taxa de falha
- Intensidade instantânea de ocorrência de óbito em uma população, dada a sobrevivência até um certo tempo.
- Valor pequeno para função implica em unidade exposta a menor quantidade de risco...
- É uma ferramenta poderosa que ajuda a quantificar e gerenciar a incerteza e o perigo em diversas áreas.

Força de mortalidade

A **força de mortalidade** -transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_h q_x}{h}$$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{P(T_x \leq h)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1 - P(T_x > h)}{h} \right]$$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{P(T_0 > x+h)}{P(T_0 > x)}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{S_{T_0}(x+h)}{S_0(x)}}{h} \right]$$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x+h)}{h S_{T_0}(x)} \right]$$

Força de mortalidade

...

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{P(T_0 > x+h)}{P(T_0 > x)}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{S_{T_0}(x+h)}{S_{T_0}(x)}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x+h)}{h S_{T_0}(x)} \right]$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{S_{T_0}(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{S_{T_0}(x+h) - S_{T_0}(x)}{h} \right]$$

$$\mu(x) = -\frac{S'_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}$$

$\mu(x)$ é a força de mortalidade na idade x . Mede a intensidade instantânea de morte *no exato momento em que a pessoa atinge a idade x* , supondo que esteja viva até lá.

Força de mortalidade

A **força de mortalidade** - transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se por:

$$\mu(x) = -\frac{S'_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}$$

- É uma medida relativa da mortalidade em que a idade **x** é atingida, enquanto **q_x** mede a mortalidade ao longo do ano.
- $\mu(x) \geq 0$.
- $\mu(x)$ não necessariamente é menor que 1.
- $\mu(x)dx$ representa a probabilidade de morte no intervalo infinitesimal $(0, dx)$.

Seguro de vida pago no momento da morte

$${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt}$$

e

$${}_nq_x = 1 - e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt}$$

Em que $\mu(x+t)$ é a força de mortalidade, em um instante t anos depois da idade x .

$$\mu(x+t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)}$$

...se uma pessoa sobreviveu até a idade x , então $\mu(x+t)$ é a intensidade de morte quando ela atinge *idade* $x+t$.

Leis de mortalidade

Lei de Gompertz

$$\mu(x+t) = Bc^{x+t} \rightarrow {}_t p_x = g^{c^{x+t}-c^x}$$

Lei de Makeham

$$\mu(x+t) = A + Bc^{x+t} \rightarrow {}_t p_x = e^{-At} g^{c^{x+t}-c^x}$$

Em que: $g = e^{-\frac{B}{\ln(c)}}$

$$0,001 < A < 0,003$$

$$0,00001 < B < 0,001$$

$$1,06 < c < 1,12$$

Força de mortalidade

Importante notar que:

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}({}_tq_x)$$

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}\right)$$

$$f_{T_x}(t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}$$

$$f_{T_x}(t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)} \times \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} = \left[-\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} \right] \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}$$

$$\mathbf{f_{T_x}(t) = \mu(x+t)({}_tp_x)}$$

Observação

A expectativa de vida de uma pessoa de idade x , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt$$

Exemplo 1: Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

Calcule e_0 , ${}_t p_x$ e ${}_t q_x$.

Exemplo 1: Nota-se que para $T_0 \sim U_c(0,140)$,
implica aceitar que $e_0 = E(T_0) = \frac{140}{2}$, pois:

$$e_0 = \int_0^{140} t \left(\frac{1}{140} \right) dt$$

$$e_0 = \left[\frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{140} \right) \right]_{t=0}^{t=140} = \frac{140^2}{2} \left(\frac{1}{140} \right) = \frac{140}{2}$$

$$e_0 = 70 \text{ anos}$$

Exemplo 1

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = {}_t p_x$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x)$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T_0 > x + t, T_0 > x)}{P(T_0 > x)} = \frac{P(T > x + t, T > x)}{P(T > x)}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{\int_{x+t}^{140} \frac{1}{140} dt}{\int_x^{140} \frac{1}{140} dt} = \frac{\frac{140 - (x + t)}{140}}{\frac{140 - (x)}{140}} = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$${}_t p_x = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$${}_t q_x = 1 - \frac{140 - x - t}{140 - x} = \frac{t}{140 - x}$$

Observação

A expectativa de vida de uma pessoa de idade x , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\omega-x} t p_x dt$$

Observação

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = - \int_0^{\omega-x} t \frac{d({}_t p_x)}{dt} dt$$

Lembre-se que do ponto de vista analítico l_x pode ser vista como uma função contínua e diferenciável em x , então:

$$e_x = - \int_0^{\omega-x} t d\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) = - \int_0^{\omega-x} t \frac{1}{l_x} d(l_{x+t})$$

Fazendo $u = t$ e $-\frac{1}{l_x} d(l_{x+t}) = dv$ logo $du = dt$ e $-\frac{l_{x+t}}{l_x} = v$, assim

$$e_x = -t \frac{l_{x+t}}{l_x} \Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt$$

$$e_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

Exemplo 1 (continuação)

$${}_t p_x = \frac{140-x-t}{140-x} \rightarrow {}_t p_0 = \frac{140}{140}$$

$$e_0 = \int_0^{140} \frac{140-t}{140} dt$$

$$e_0 = t - \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{140} \right) \bigg|_{t=0}^{t=140} = 70 \text{ anos}$$

EXEMPLO 2: Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

Calcule $\mu(x+t)$. Lembrando do exercício anterior que:

$${}_t p_x = \frac{140-x-t}{140-x} \quad {}_t q_x = \frac{t}{140-x}$$

EXEMPLO 2

$${}_t p_x \mu(x+t) = f_{T_x}(t)$$

Então:

$${}_t q_x = \frac{t}{140-x} = F_{T_x}(t)$$

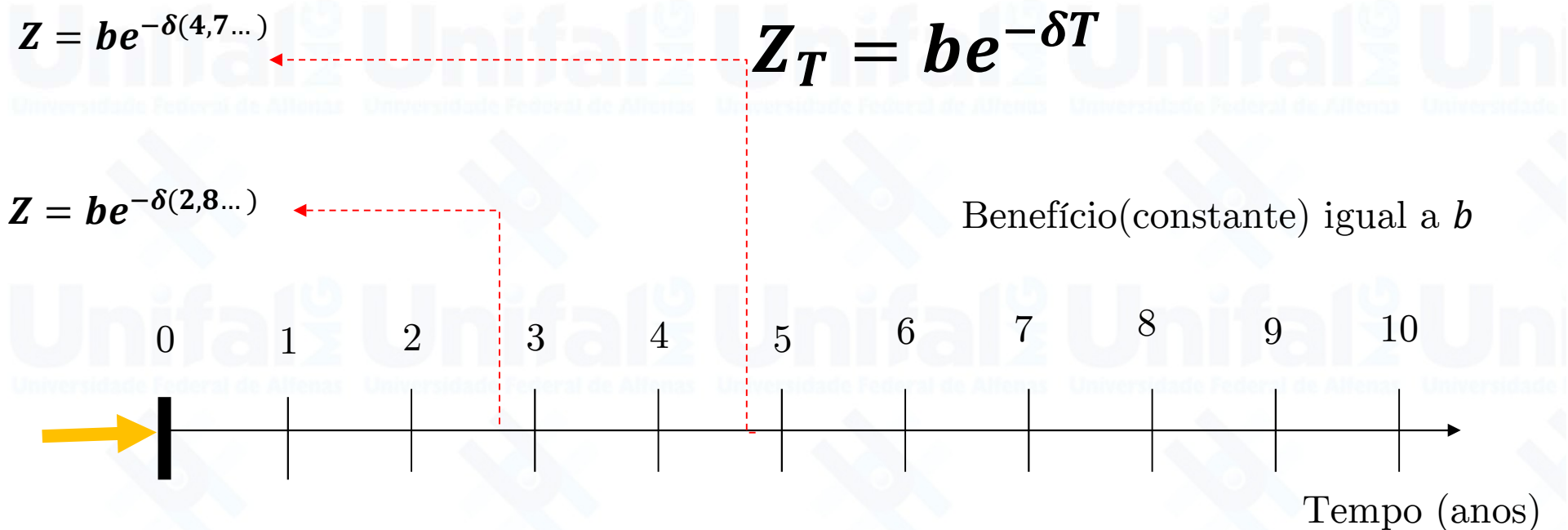
Considerando que $\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = f_{T_x}(t)$, assim:

$$\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{140-x} \right) = \frac{1}{140-x} = f_{T_x}(t)$$

Logo

$$\mu(x+t) = \frac{\frac{1}{140-x}}{\frac{140-x-t}{140-x}} = \frac{1}{140-x-t}$$

Seguro de vida pago no momento da morte



Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de $b_t e^{-\delta T}$, logo:

$$E(VP) = E(be^{-\delta T}) = bE(e^{-\delta T})$$

Lembrando que $\delta = \ln(1 + i)$.

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n {}^{\textcolor{red}{Z}}_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n {}^{\textcolor{red}{e}^{-\delta t}} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

SEGURO DE VIDA VITALÍCIO

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty {}^{\textcolor{red}{Z}}_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty {}^{\textcolor{red}{e}^{-\delta t}} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

EXEMPLO 3: Considere que a função de sobrevivência e força de mortalidade de $x = 30$ em dada população seja de:

$${}_tp_{30} = \frac{70-t}{70} \quad \text{e} \quad \mu(30+t) = \frac{1}{70-t} \quad \text{para } t > 0$$

Esse indivíduo decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que a taxa de rentabilidade constante, e suponha que $i = 5\%$ ao ano.

Calcule o prêmio puro único que paga 1 *u.m.* de benefício pago no momento da morte do segurado.

EXEMPLO 3

$$\bar{A}_{30:1:\overline{20}|} \quad i = 5\% \text{ ao ano.} \quad v = e^{-\ln(1,05)}$$

$$b = 1, 0 \leq t \leq 20 \quad v_t = e^{-\delta t}, 0 \leq t \leq 20 \quad Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq 20 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

EXEMPLO 3

$$VPA = E(Z_T) = \bar{A}_{30^{1:\overline{20}}|}$$

$$b = 1, 0 \leq t \leq 20 \quad v_t = e^{-\delta t}, 0 \leq t \leq 20 \quad Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq 20$$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}|} = \int_0^{20} e^{-\delta t} f_{T_{30}}(t) dt = \int_0^{20} \textcolor{red}{e^{-\delta t}} {}_t p_{30} \mu(30+t) dt = \int_0^{20} e^{-\delta t} \frac{1}{70} dt$$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}|} = \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} \Bigg|_{t=0}^{t=20} = \frac{1}{-70\delta} [e^{20(-\delta)} - e^{0(-\delta)}]$$

Como $\delta = \ln(1,05)$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}|} = \frac{1}{-3,4153} (e^{-0,9758} - 1) \approx 0,182446$$

EXEMPLO 3

Veja que, é suficiente para o segurado pagar $0,182446 \text{ u.m.}$ hoje de forma a receber (o beneficiário) $1,00 \text{ u.m.}$ na ocorrência de sinistro.

O exemplo considerou que o benefício seria de 1 u.m. , e caso o segurado contratasse um seguro que paga \$ 250000,00 reais no momento de morte? Quanto deveria ser o prêmio puro único pago por ele???

$$\bar{A}_{30:1:\overline{20}|}, \quad T_{30} \sim U_c(0,70) \text{ e } \quad i = 5\% \text{ a.a. } v = e^{-l} (1,05)$$

$$b = 2500000.$$

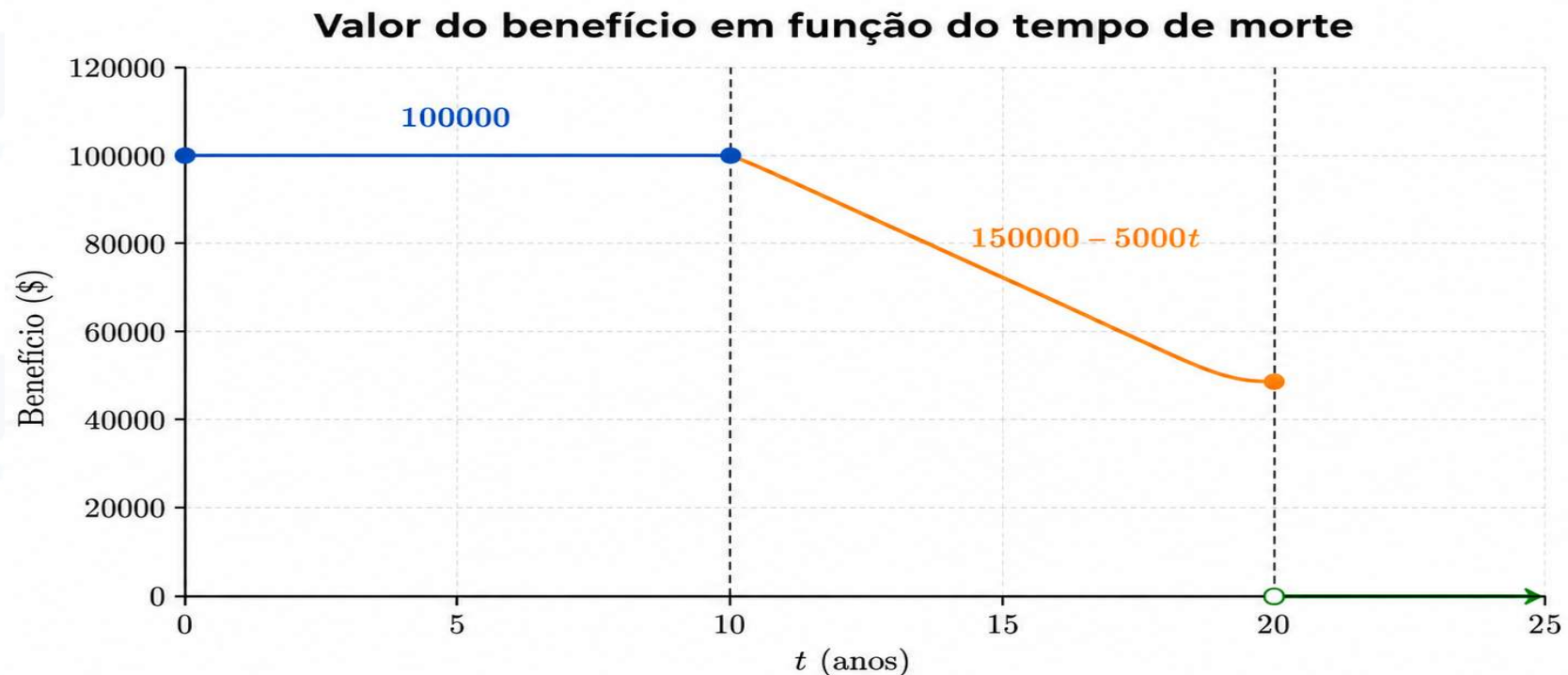
$$\bar{A}_{30:1:\overline{20}|} \approx 0,182446$$

$$250000 \bar{A}_{30:1:\overline{20}|} \approx 45611,53$$

Caso o valor do benefício seja \$ 250000,00, o prêmio a ser pago pelo segurado deverá ser (arredondando no centavo) de \$45611,53 (considerando a mesma taxa de juros).

EXEMPLO 4: Para proteger seu filho de 10 anos, uma pessoa de 30 anos decide fazer um contrato de seguro de vida temporário com benefício variável no tempo (Considere distribuição $T_{30} \sim U_c(0, 70)$). Considere $i = 5\%$ ao ano.

- I) Se morrer dentro de 10 anos o benefício será de \$100000,00.
- II) Se morrer entre 10 e 20 anos, o benefício será: $150000 - 5000t$.



$$B(t) = \begin{cases} 100000, & 0 \leq t \leq 10 \\ 150000 - 5000t, & 10 < t \leq 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

EXEMPLO 4: Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$Z_T = b_T e^{-\delta T} = \begin{cases} 100000 e^{-\delta T}, & T \leq 10 \\ (150000 - 5000T) e^{-\delta T}, & 10 < T \leq 20 \end{cases}$$

Portanto:

$$VPA = \int_0^{10} \frac{100000 e^{-\delta t}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t) e^{-\delta t}}{70} dt$$

$$VPA = VPA_1 + VPA_2$$

$$VPA_1 = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\delta t}}{70} dt$$

$$VPA_1 = \frac{10000e^{-\delta t}}{7(-\delta)} \Big|_{t=0}^{t=10} = \frac{10000e^{-0,4879} - 10000}{-0,34153}$$

$$VPA_1 \approx 11304,59$$

EXEMPLO 4

$$VPA_2 = \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\delta t}}{70} dt$$

Por partes:

$$\int u dr = ur - \int r du$$

então

$$u = 150000 - 5000t;$$

→

$$du = -5000dt$$

$$dr = \frac{e^{-\delta t}}{70} dt$$

→

$$r = \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)}$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} \Big|_{t=10}^{t=20} - \int_{10}^{20} - \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} 5000 dt$$

EXEMPLO 4

$$VPA_2 = \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\delta t}}{70} dt$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} \Big|_{t=10}^{\dots t=20} + \int_{10}^{20} \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} 5000 dt$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} \Big|_{t=1}^{t=20} + \frac{e^{-\delta t}}{7(-\delta)^2} 500 \Big|_{t=10}^{t=20}$$

$$VPA_2 = \frac{5000e^{-0,04879(20)} - 10000e^{-0,04879(10)}}{7(-0,04879)} + \frac{500(e^{-0,04879(20)} - e^{-0,04879(10)})}{7(-0,04879)^2}$$

$$VPA_2 \approx 12457,73 - 7112,165 \approx 5345,565$$

Exemplo 4: Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$VPA = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1,05)}}{70} dt$$

$$VPA = VPA_1 + VPA_2$$

$$VPA = 11304,59 + 5345,565 \approx \$16650,15$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

T_x Contínuo

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n Z_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

T_x discreto

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

T_x Contínuo

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

T_x discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$A_{x:1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$e_0 = \sum_{t=0}^{\omega-x} t {}_t p_x q_{x+t}$$

$$E(Z_T)$$

$$e_0 = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, & 0 \leq T \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:1:\overline{n}|} = \int_0^n Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. *Actuarial Mathematics*, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos*. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUE S, R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões*. Curitiba : CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. *Matemática actuarial – Vida e pensões*. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.



Matemática atuarial

Seguros Aula 7

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Em geral a variabilidade de uma variável é avaliada pela discrepância de seus valores em relação à média ou à mediana.
- - A média dos desvios é sempre zero e, portanto, nada informativa.
 - Tomando o quadrado dos desvios e, então, calculando o valor esperado, chegamos a uma das mais importantes medidas de variabilidade.

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- A definição matemática da variância de uma variável aleatória Z_T é tal que:

$$\text{var}(Z_T) = E\{[Z_T - E(Z_T)]^2\}$$

$$\text{var}(Z_T) = E(Z_T^2) - E(Z_T)^2$$

- A raiz quadrada da variância é denominada de desvio-padrão e representado por σ_{Z_T} .

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

Considerando $Z_T = bv^{T+1}$, uma função de variável aleatória e por consequência também uma variável aleatória, tem-se:

$$\text{var}(Z_T) = \text{var}(bv^{T+1}) = b^2 \text{var}(v^{T+1})$$

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

Caso de T discreto: $var(Z_T) = {}^2A_{x^1:\overline{n}|} - (A_{x^1:\overline{n}|})^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{n-1} v^{2t+2} {}_t p_x q_{x+t} - \left[\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} \right]^2$$

Caso de T contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{x^1:\overline{n}|} - (\overline{A}_{x^1:\overline{n}|})^2$

$$var(Z_T) = E(e^{-2\delta T}) - E(e^{-\delta T})^2 = \int_0^n e^{-2\delta t} f_{T_x}(t) dt - \left[\int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt \right]^2$$

Cálculo da variância: Seguro de vida inteiro

Caso de T discreto: $var(Z_T) = {}^2A_x - (A_x)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{2t+2} {}_t p_x q_{x+t} - \left[\sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} \right]^2$$

Caso de T contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_x - (\overline{A}_x)^2$

$$var(Z_T) = E(e^{-2\delta T}) - E(e^{-\delta T})^2 = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} f_{T_x}(t) dt - \left[\int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt \right]^2$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

➤ Caso discreto

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = AX(i, x, n, b, 1)$$

$$var(Z) = AX(i, x, n, b, 2) - AX(i, x, n, b, 1)^2$$

SEGURO DE VIDA VITALÍCIO

➤ Caso discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_x = AX(i, x, \max(x) - x, b, 1)$$

$$var(Z) = AX(i, x, \max(x) - x, b, 2) - AX(i, x, \max(x) - x, b, 1)^2$$

EXEMPLO 1: Calcule a variância de Z_T .

$$b = 1, \quad 0 \leq t < 5 \quad v^{t+1}, t \geq 0 \quad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & 0 \leq T < 5 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Lembramos que $A_{25^1:\bar{5}|} \approx 0,0037888$ para $i = 4\%$.

Dados do *exemplo 1*

$i = 4\%$

Idade	q_x	$p_x = 1 - q_x$	$l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

EXEMPLO 1

$$\text{var}(Z_T) = {}^2A_{25^{1:\overline{5}}} - (0,0037888)^2$$

$$\text{var}(Z_t) = \sum_{t=0}^4 \left[\left(\frac{1}{1,04} \right)^2 \right]^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+} - (0,0037888)^2$$

$$\text{var}(Z_T) = \left[\left(\frac{1}{1,04} \right)^2 q_{25} + \left(\frac{1}{1,04} \right)^4 {}_1 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,04} \right)^6 {}_2 p_{25} q_{27} + \left(\frac{1}{1,04} \right)^8 {}_3 p_{25} q_{28} + \left(\frac{1}{1,04} \right)^{10} {}_4 p_{25} q_{29} \right] - (0,00337014)^2$$

$$\text{var}(Z_T) \approx 0,0033557$$

EXEMPLO 2: Considere que uma pessoa de 30 anos decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que o tempo de vida adicional desta pessoa possa ser modelado pela distribuição uniforme contínua de parâmetros 0 e 70, ou seja:

$$T_{30} \sim U_c(0,70).$$

Considere $i = 5\%$ ao ano.

Sabemos pela resolução do problema que $\bar{A}_{30:20|} \approx 0,182446$. A partir dessas informações obtenha a variância para a função valor presente associada a esse seguro.

EXEMPLO 2

$$b = 1, 0 \leq t \leq 20 \quad e^{-\delta t}, t \geq 0 \quad Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, & 0 \leq T \leq 20 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$\text{var}(Z_T) = \int_0^{20} e^{-2\delta t} \frac{1}{70} dt - 0,182446^2$$

$$\text{var}(Z_T) = \frac{1 - e^{-40\delta}}{140\delta} - 0,182446^2 \approx 0,09231757$$

$$\sigma_{Z_T} = \sqrt{0,09231757} \approx 0,3038381$$

Prêmio calculado por percentil

- Considere um prêmio Π_x de um seguro vitalício de forma que:

$$P(Z_{T_x} \leq \Pi_x) = \alpha$$

$$P(b e^{-\delta T_x} \leq \Pi_x) = \alpha$$

$$P\left(e^{-\delta T_x} \leq \frac{\Pi_x}{b}\right) = \alpha$$

$$P\left(-\delta T_x \leq \ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)\right) = \alpha$$

$$P\left(T_x \geq -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}\right) = \alpha$$

Prêmio calculado por percentil

$$P(Z_T \leq \Pi_{t_\alpha}) = \alpha$$

$$P(T_x \geq t_\alpha) = \alpha$$

$$P\left(T_x \geq -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}\right) = \alpha$$

Como a variável aleatória de comportamento conhecido é o tempo (T), é mais conveniente lidar com sua distribuição do que com a distribuição dos valor presente atuarial.

Assim:

$$t_\alpha = -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}$$

Prêmio calculado por percentil

- Devido à variabilidade elevada, pode ser interessante determinar o valor presente a partir de um quantil predefinido.
- Obter um valor presente de baseado nas probabilidades dos benefícios futuramente pagos, serem inferiores ao estipulado.

EXEMPLO 3: Considere um seguro de vida vitalício feito por $x = 30$, com benefício igual a \$200000, dado que $T_{30} \sim U_c(0,70)$ e $i = 5\%$ ao ano. Qual seria o valor do prêmio Π_{30} de forma que $P(Z_T \leq \Pi_{30}) = 0,9$?

EXEMPLO 3

$$b = \$20000,00. \quad T_{30} \sim U_c(0,70) \quad i = 5\% \text{ ao ano} \quad \alpha = 0,9$$

$$P(T_{30} \geq t_{90\%}) = 0,9$$

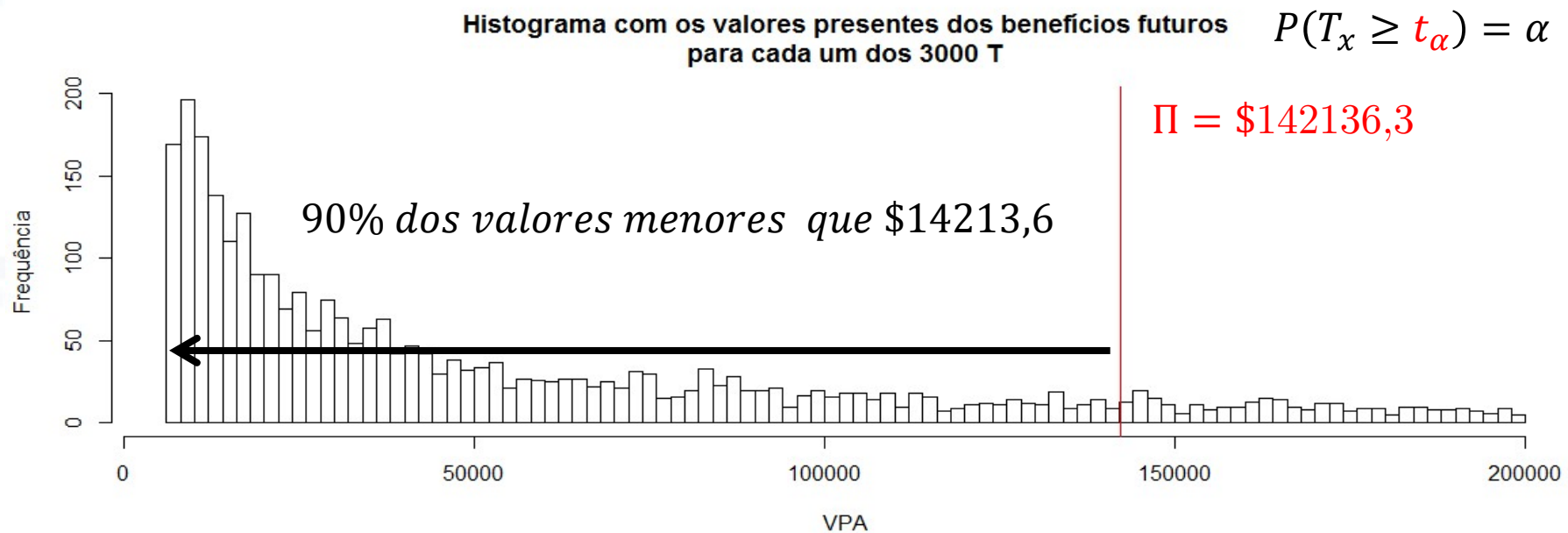
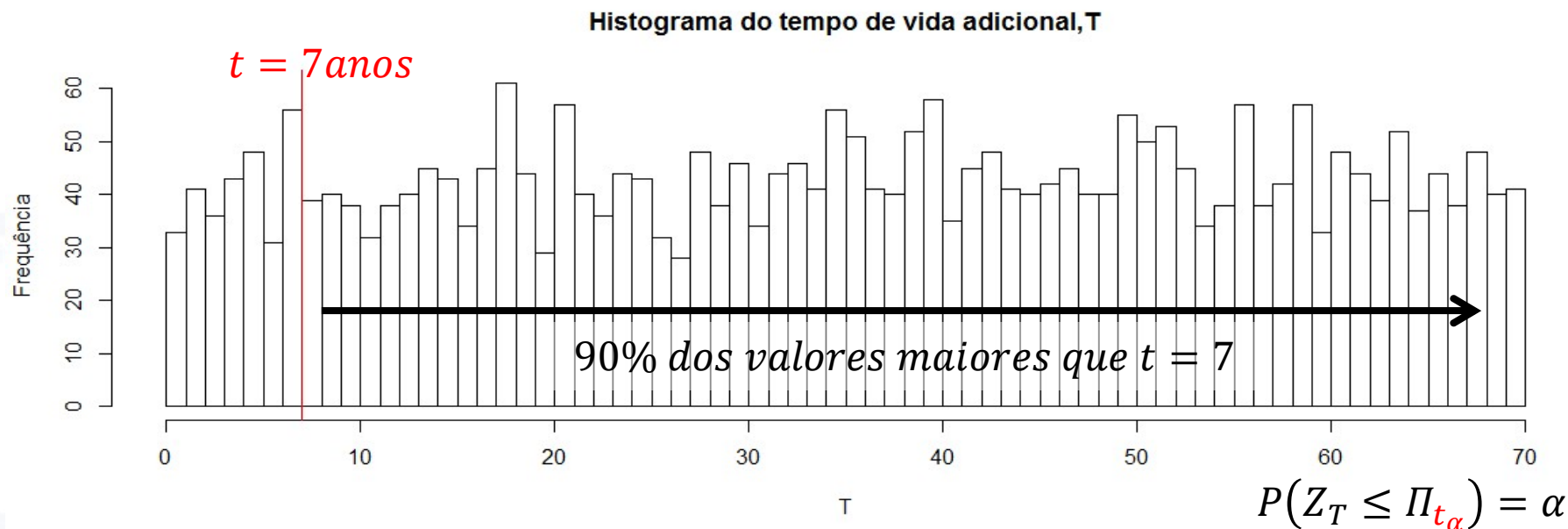
$$P(T_{30} \geq t_{90\%}) = \int_{t_{90\%}}^{70} \frac{1}{70} dt = \frac{70 - t_{90\%}}{70} = 0,9$$

$$t_{90\%} = 7 \rightarrow P(T_{30} \geq 7) = 0,9$$

$$P(T_{30} \geq 7) = P\left(T_{30} \geq -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_{30}}{200000}\right)}{\ln(1,05)}\right) = 0,9$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{\Pi_{30}}{200000}\right)}{\ln(1,05)} = 7$$

$$\Pi_{30,0,9} \approx \$142136,3$$



- Quanto maior o tempo de vida adicional menor o valor presente.
- Valores grandes de t geram valores pequenos e próximos de VPA.

EXEMPLO 4: O segurado de idade x decide fazer um seguro de vida vitalício com pagamento de benefício unitário no momento de sua morte. Considere a taxa instantânea de juros, $\delta = 0,06$ e que $T_x \sim \text{Exp}(0,04)$.

$$f_{T_x}(t) = 0,04e^{-0,04t}, \quad t > 0$$

Determine o valor de Π_x tal que $P(Z_T \leq \Pi_x) = 0,1$.

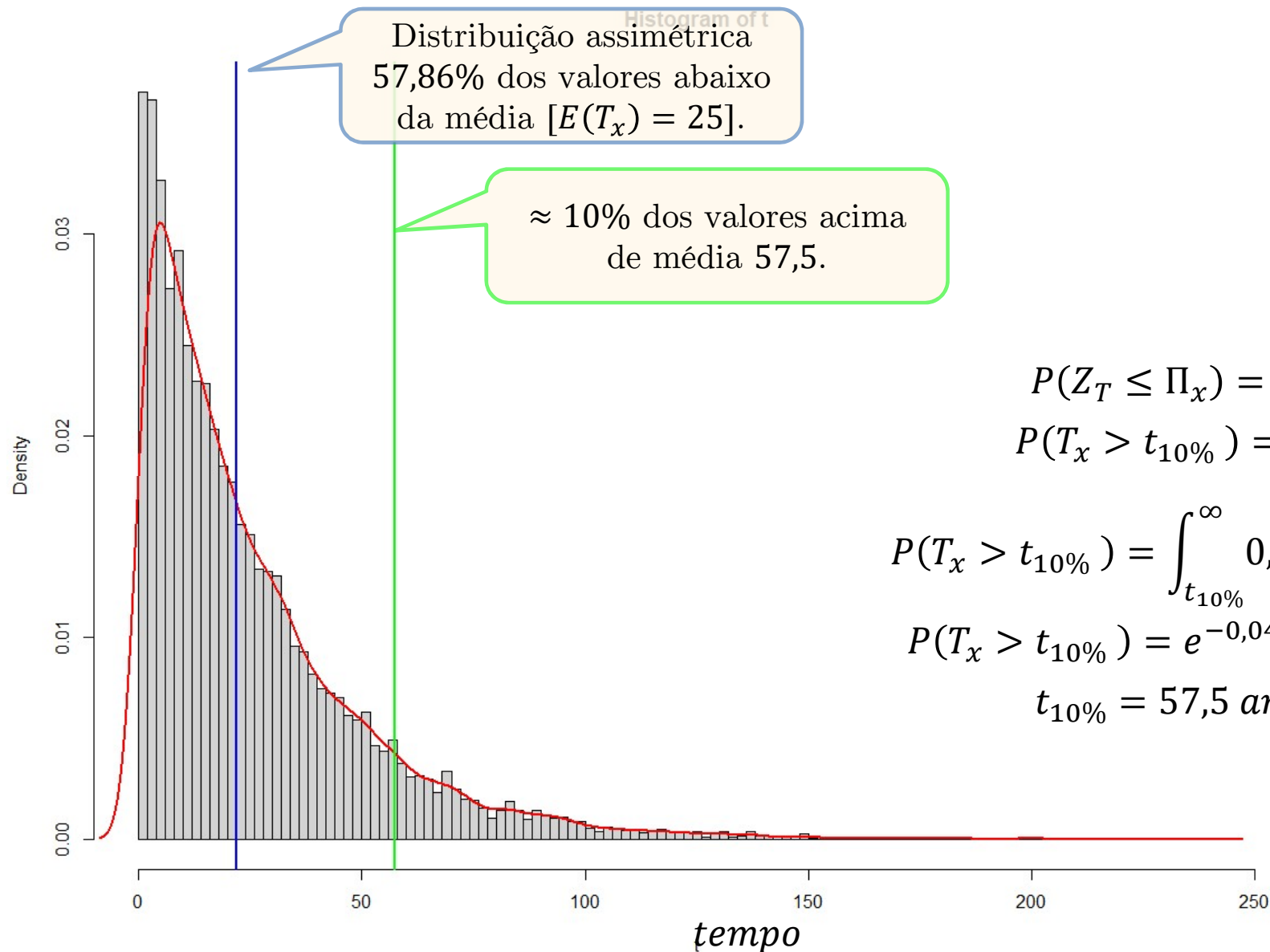
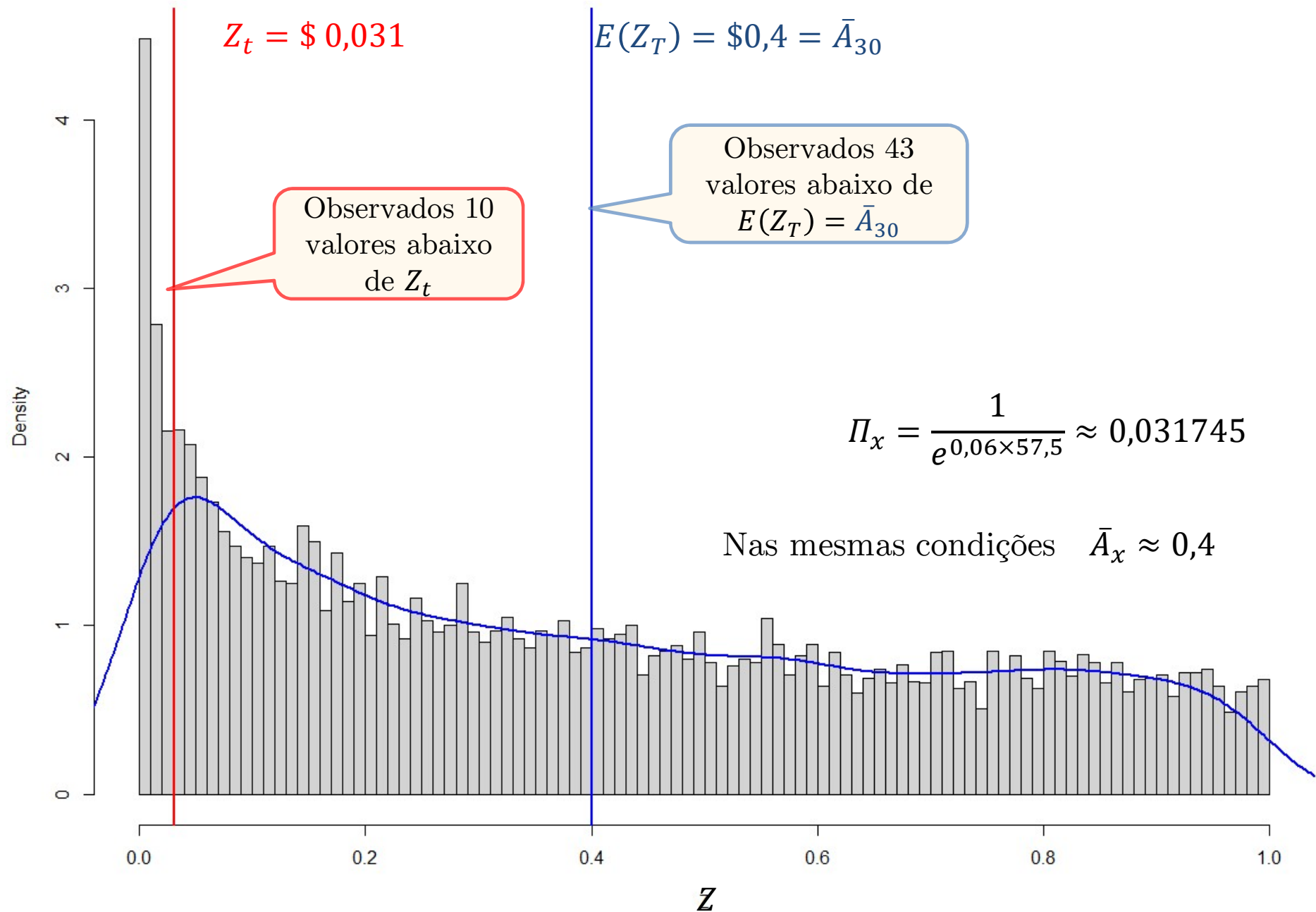


Gráfico da simulação de 1000 apólices com as condições do exemplo 4.

Histogram of Z



SEGURO DE VIDA INTEIRO

$$P(Z_{T_x} \leq z) = P\left(T_x \geq -\frac{\ln\left(\frac{z}{\bar{b}}\right)}{\delta}\right)$$

$$P(Z_{T_x} \leq z) = \frac{S_{T_0}\left(x + \left(-\frac{\ln(z)}{\delta}\right)\right)}{S_{T_0}(x)}, \quad e^{-\delta(\omega-x)} \leq z \leq 1$$

EXEMPLO 5: Considere a função de sobrevivência dada por:

$$S_{T_0}(t) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - t)^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq t \leq 115.$$

Dado $x = 40$ e $\delta = 4\%$ determine $P(Z_{T_x} \leq z)$.

EXEMPLO 5:

$$P(Z_{T_{40}} \leq z) = \frac{S_{T_0} \left(40 - \frac{\ln(z)}{0,04} \right)}{S_{T_0}(40)} = \frac{115^{-\frac{1}{3}} \left(115 - \left(40 - \frac{\ln(z)}{0,04} \right) \right)^{\frac{1}{3}}}{115^{-\frac{1}{3}} (115 - 40)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(Z_{T_{40}} \leq z) = \frac{\left(75 + \frac{\ln(z)}{0,04} \right)^{\frac{1}{3}}}{(75)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(Z_{T_{40}} \leq z) = \left(\frac{3 + \ln(z)}{3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad e^{-3} \leq z \leq 1$$

Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Considere agora a variável aleatória S associada a uma carteira de seguros composta por n apólices (independentes e identicamente distribuídas), isso é

$$S = \sum_{i=1}^n Z_i$$

em que Z_i corresponde a função valor presente da apólice i .

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) = \sum_{i=1}^n E(Z_i) = nE(Z)$$

$$\text{var}(S) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(Z_i) = n \text{var}(Z)$$

Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Definição: Teorema central do limite.

Seja S uma variável aleatória correspondente a uma soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança μ e variância σ^2 . Então:

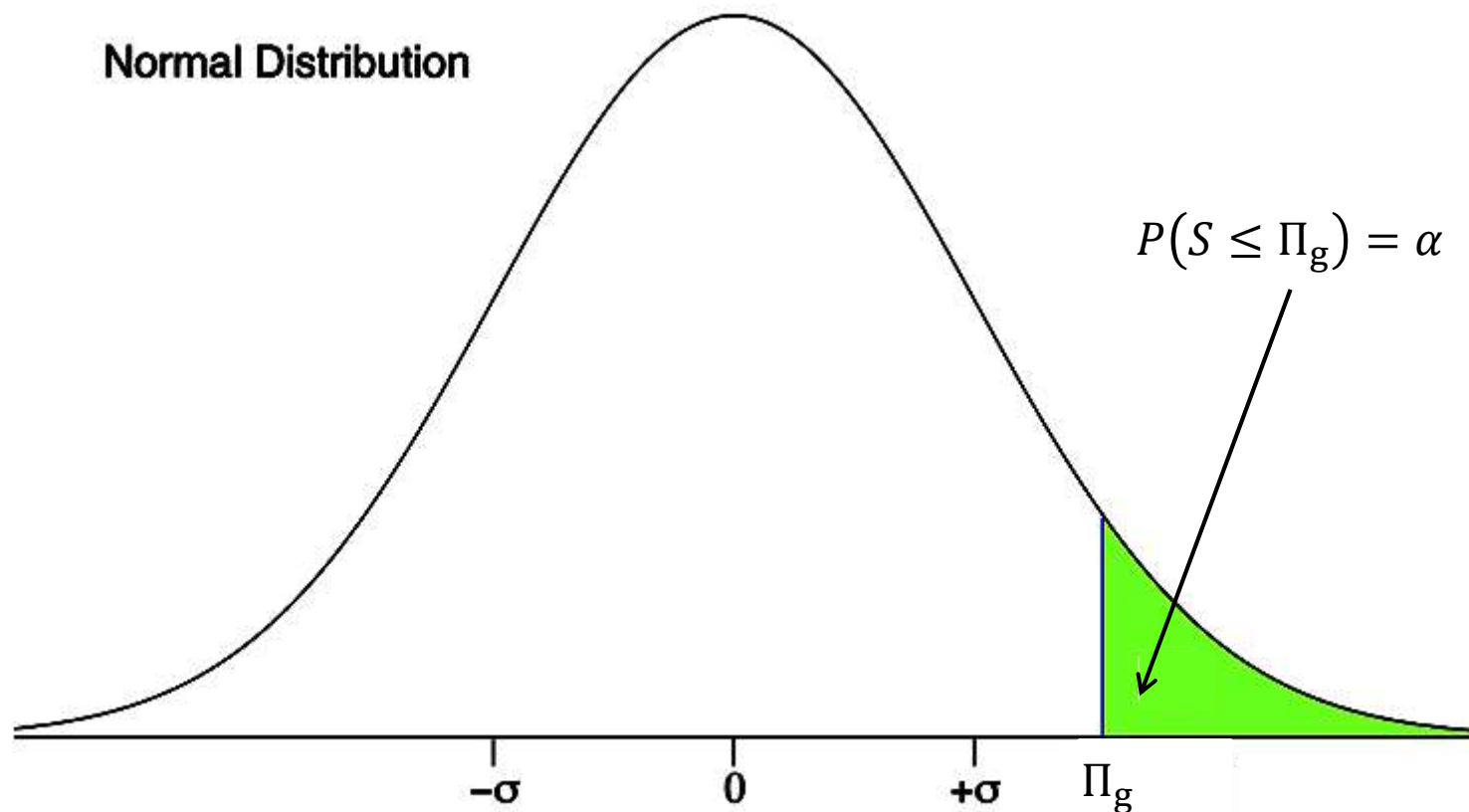
$$W = \frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow W \sim N(0,1)$$

Logo

$$S \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Chamando de S a soma dos valores presentes necessários a cobrir os sinistros ocorridos, queremos encontrar o valor Π_g (prêmio global) tal que:



Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

$$P(S \leq \Pi_g) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - nE(Z)}{\sigma_Z \sqrt{n}} \leq \frac{\Pi_g - nE(Z)}{\sigma_Z \sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P\left(W \leq \frac{\Pi_g - nE(Z)}{\sigma_Z \sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\Pi_g - nE(Z)}{\sigma_Z \sqrt{n}} = w_\alpha$$

EXEMPLO 6: Considere uma carteira composta por 100 apólices de seguro de vida vitalício, com o benefício pago no momento do falecimento do segurado. Suponha que todas as apólices sejam independentes e identicamente distribuídas. Admita ainda que a idade dos segurados seja x , e que o valor esperado do pagamento por apólice seja 0,4, com variância igual a 0,09.

Deseja-se determinar o valor do prêmio global Π_g , utilizando a aproximação normal, tal que a probabilidade de o total dos benefícios pagos ser inferior ou igual a esse prêmio seja de 95%, isto é, $P(S \leq \Pi) = 0,95$. Considere ainda um benefício unitário $b = 1$ e uma taxa de desconto $\delta = 0,06$.

SOLUÇÃO

Se para cada apólice temos $E(Z) = 0,4$ u.m. e $var(Z_T) \approx 0,09$, então $E(S) = 40$ e $var(S) = 9$. Assim:

$$P(S \leq \Pi) = 0,95 \quad P\left(W \leq \frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0,95$$

Como $W \sim N(0,1)$, então

$$\frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}} = w_{0,95} = 1,645$$

$$\Pi = 44,93.$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. *Actuarial Mathematics*, 2^a edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos*. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUE S,R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões*. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. *Matemática actuarial – Vida e pensões*. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

